Rozšíření MA1 - domácí úkol 5 : Diferenciální počet funkcí dvou a tří poměnných 2.

Řešení – 1.část:

I. Diferencovatelnost funkce, totální diferenciál a lineární aproximace funkce:

Tento domácí úkol má sloužil k pochopení a procvičení v aplikacích velmi důležitých pojmů, které „souvisejí s derivacemi (zde parciálními), a které jsou „uvedeny" v zadání „nahoře":

jsou to :

(i) diferencovatelnost funkce více proměnných;

(ii) totální diferenciál funkce více proměnných;

(iii) souvislost diferencovatelnosti fce v bodě ($\in Df^{\circ}$) s lineární aproximací této funkce v okolí tohoto bodu.

Uvedeme si zde základní poznatky o dané věci (stručný „přehled"), jako pomůcku pro řešení příkladů z tohoto domácího úkolu, podrobněji najdete „vše" vysvětleno v přednášce MA2 z 25.3.2020.

Připomeňme si nejprve, co vše plyne z existence vlastní derivace $f'(a) \in R$ funkce jedné proměnné $y=f(x)$, která je definována v $U(a)$:

(1) existuje-li $f'(a) \in R$, pak f je spojitá v bodě $x=a$;

(2) existuje tečna ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$, $f'(a)$ je směrnice této tečny, tedy, tečna ke grafu f v bodě $[a, f(a)]$ má rovnici $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, $x \in R$;

(3) hodnoty funkce f v okolí bodu $x=a$ lze lineárně aproximovat „s malou chybou", přesně „zapsáno :

v $U(a)$ platí:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \omega(x-a),$$

kde $\lim_{x \to a} \frac{\omega(x-a)}{x-a} = 0$;

a lineární funkce $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ je tzv. lineární aproximace funkce f v okolí bodu $x=a$ (též Taylorův polynom 1. stupně), a grafem této lineární aproximace je právě tečna ke grafu funkce v bodě $[a, f(a)]$ (viz (2)), a $\omega(x-a)$ je „chyba" této lineární aproximace, „řádově" menší než je vzdálenost $x-a$ (to vyjadřuje $\lim\limits_{x\to a} \frac{\omega(x-a)}{x-a} = 0$)

A jak to bude v případě (zatím, obecně později) funkce dvou proměnných? Bude mít analogické vlastnosti k (1)–(3) i funkce dvou (a více) proměnných v okolí bodu $U(A)$ bodu $A \in Df^{o}$, pokud bude mít v bodě A všechny parciální derivace?

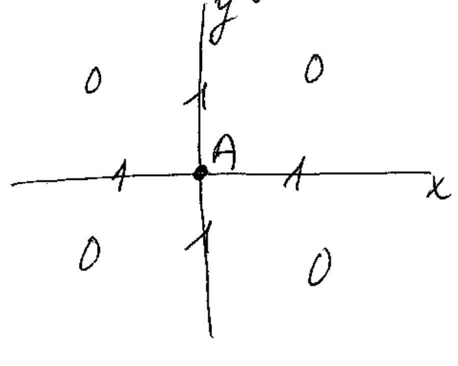
Bohužel ne – existence, i když všech parciálních derivací funkce více proměnných v nějakém bodě je vlastnost mnohem „slabší", než je existence derivace funkce jedné proměnné.

Existence parciálních derivací dle všech proměnných v bodě „nezaručuje" ani spojitost funkce v daném bodě, ani možnost "lineární aproximace funkce v okolí tohoto bodu (pro $n=2$ je grafem lineární aproximace tečná rovina). Ukažme si příklad:

(1) <u>Příklad:</u> Mějme funkci $f(x,y)$, definovanou v R^2:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \cdot y = 0 \ \text{(tj. na osách } x, y\text{)} \\ 0 & \text{pro } x \cdot y \neq 0 \ \text{(všude mimo osy } x, y\text{)} \end{cases}$$

a vezměme si bod $A = [0,0]$:



Funkce f má v počátku (u nás v bodě $A[0,0]$) obě parciální derivace, a to $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ – neboť:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

(a stejně se ukáže, že i $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ přímo z definice).

Ale f není spojitá v bodě $[0,0]$:

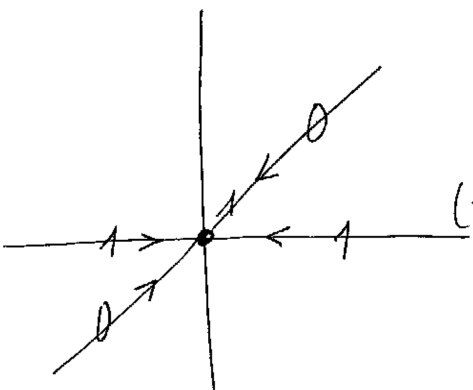
$f(0,0) = 1$, a spojitost f v $(0,0)$ by byla, kdyby tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \ ;$$

ale funkce f v bodě $(0,0)$ limitu vůbec nemá – stačí „limitit" po dvou různých „cestách" k počátku:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 1 = 1 \text{ , ale třeba}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \neq 1 \ .$$



A obecně (nebudeme to detailně rozebírat, ale snad je to „vidět"), když existuje

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = L \text{ , pak též i}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a_1,a_2)\\ (x,y)\in M}} f(x,y) = L$$

$(a_1,a_2) \in M'$ (tj. hromadný bod M),

tj. po jakékoliv „cestě" k bodu (a_1,a_2) musíme dostat stejnou limitu, ale v našem příkladu tomu tak není.

Je to analogie toho, co známe u funkce jedné proměnné –
– $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow$ ex. $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ a platí

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = L\,;$$

pokud $\lim\limits_{x\to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-} f(x)$, f v bodě $x=a$ limitu nemá.

Tedy, funkce v uvedeném příkladu nemá limitu v bodě $(0,0)$, tedy zde není spojitá (i když má v bodě $(0,0)$ obě parciální derivace).

(2) analogie tečny ke grafu funkce jedné proměnné je zřejmě u funkce dvou proměnných $f(x,y)$ tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)] = T$ grafu f; (bod $[x_0,y_0]$ je vnitřní bod D_f).

A pokud bude mít graf f. tečnou rovinu v bodě T, pak v této rovině budou jistě ležet i tečny ke grafům funkcí $z = f(x, y_0)$ a $z = f(x_0, y)$ v bodě T, který bude bodem obou grafů (pro $x = x_0$ a $y = y_0$), tedy budou existovat derivace těchto funkcí v bodě $x = x_0$, resp. $y = y_0$, tj. dle definice $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ (vlastní).

A zkusme si (jako příklad z analytické geometrie a na užití vektorových funkcí jedné proměnné) odvodit rovnici této „tečné" roviny:

(i) „řez" grafu f rovinou $y=y_0$ můžeme popsat vektorovou funkcí

$$\vec{\varphi}(x) = (x, y_0, f(x,y_0)), \quad x \in \mathcal{U}(x_0);$$

pak $\vec{\varphi}\,'(x_0) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$ je tečný vektor ke křivce, popsané „funkcí" $\vec{\varphi}(x)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ $(=T)$

(ii) „řez" grafu f rovinou $x=x_0$ můžeme popsat vektorovou funkcí

$$\vec{\psi}(x) = (x_0, y, f(x_0,y)), \quad y \in \mathcal{U}(y_0),$$

pak $\vec{\psi}\,'(y_0) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$ je tečný vektor ke křivce, popsané funkcí $\vec{\psi}(x)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ $(=T)$

a pak, máme-li bod T tečné roviny, a dva její směrové vektory $\vec{\varphi}\,'(x_0), \vec{\psi}\,'(y_0)$, snadno už dostaneme „rovnici" roviny, tečné v bodě T ke grafu fce $f(x,y)$ – označme ji třeba τ:

$X \in \tau \iff$ $(X=[x,y,z])$

$$\begin{vmatrix} x-x_0, & y-y_0, & z-f(x_0,y_0) \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{t.j.}$$

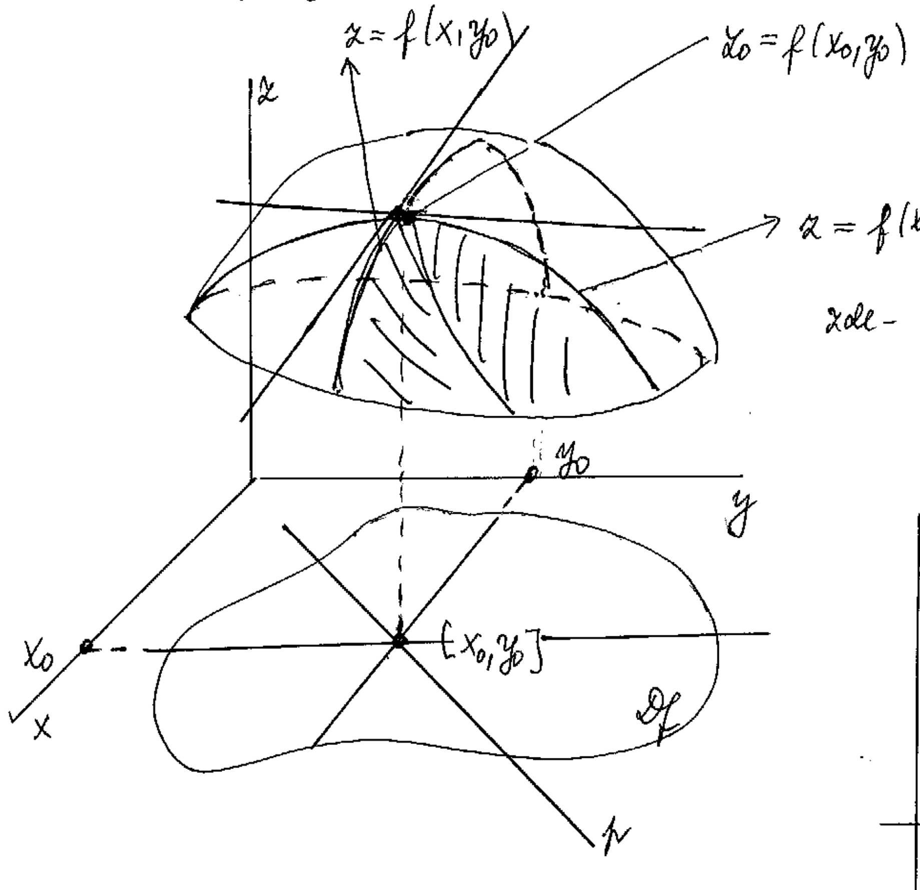
$$z - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0, \text{ tedy odtud}$$

$$\underline{z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)} \qquad (*)$$

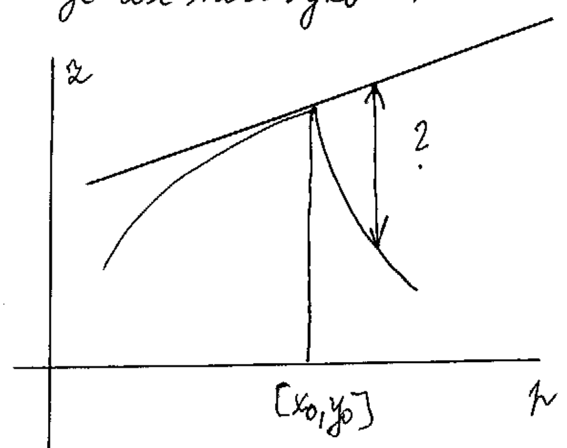
Tedy, pokud graf funkce f má v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ tečnou rovinu, pak tato tečná rovina má rovnici $(*)$.
Ale, bohužel, rovnice $(*)$ není vždy rovnicí roviny tečné ke grafu – stačí se vrátit k předchozímu příkladu:
funkce $f(x,y)$ z příkladu v (1) má parciální derivace v bodě $[0,0]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0, \quad f(0,0) = 1,$$ tedy rovina, zde daná $(*)$,

má rovnici $z = 1$, což je rovina rovnoběžná s rovinou $z=0$ ve „výšce“ 1 – ale to není rovina tečná ke grafu funkce f – „$f(x,y) = 0$ všude v R^2, kromě os x, y!
Ale ani, když funkce bude v bodě $[x_0,y_0]$ spojitá, rovnice $(*)$ nemusí „být“ rovnice tečné roviny – snad je to vidět na „náčrtku“:



zde – řez grafu rovinou kolmou na rovinu $z=0$ se stopou p je asi takovýto:



zde se asi nedá říci, že se rovina, kterou uvažujeme v $(*)$, dotýká grafu vpravo od „špičky“ řezu!

A odtud je snad vidět, že je třeba nějak vyjádřit, co znamená, že rovina, daná v (*), je rovina tečná ke grafu f, a následuje velmi důležitá definice, a pak také najít postačující podmínky pro existenci tečné roviny, bude v jedné základní větě. A důležité je to proto, že tečná rovina je asi opět grafem linearizace třeba i „složité" funkce dvou proměnných, a linearizace je opět dost užitečná!

A tečná rovina ke grafu fce dvou (a pak i více) proměnných se charakterizuje pomocí charakterizace tečny ke grafu funkce jedné proměnné (zopakováno bylo na začátku – skoro 1 den):

<u>Definice</u>:

Funkce $f(x,y)$, definovaná v okolí $U(x_0,y_0)$, je diferencovatelná v bodě (x_0,y_0) (též se říká, že f má v bodě (x_0,y_0) totální diferenciál), když platí:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \omega(x-x_0,y-y_0),$$

kde $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{\omega(x-x_0,y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} = 0$.

„<u>Graficky</u>" – rozdíl z-ové souřadnice bodu na grafu funkce a odpovídajícího bodu tečné roviny je řádově menší, než je vzdálenost bodů (x,y) a (x_0,y_0) v rovině.

Tento rozdíl je právě $\omega(x-x_0,y-y_0)$, neboť, dle (*), je
$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ z-ová souřadnice bodu roviny, teď už tečné.

A dále pak:

1) funkce

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

je lineární funkce proměnných x, y – a je to lineární aproximace funkce $f(x,y)$ v okolí bodu (x_0,y_0), chyba aproximace je jistá funkce $\omega(x-x_0, y-y_0)$ (řádově menší, než je vzdálenost bodů (x,y), (x_0,y_0) v rovině), tj.

$$f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \quad \text{v } U(x_0,y_0)$$

2) a přírůstek funkce (diference) pak lze aproximovat v $U(x_0,y_0)$:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \cong \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0);$$

výraz $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ se nazývá diferenciál funkce f v bodě (x_0,y_0) (též často totální diferenciál) – je to vlastně „linearizace diference" funkce. A stejně, jako u funkcí jedné proměnné, přírůstky proměnných se značí dx, dy, a pak diferenciál je

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy$$

(někdy se diferenciál „píše" i s přírůstky – pak se značí $df(x_0,y_0; dx,dy)$)

3) Pro zjednodušení „zápisu" diferenciálu zavedeme vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = \nabla f(x_0,y_0)$ $(= \operatorname{grad} f(x_0,y_0))$ – gradient funkce f (v bodě (x_0,y_0));

a označíme-li vektor přírůstků $(x-x_0, y-y_0) = X-X_0$, pak

$$\underline{df(X_0; X-X_0) = \nabla f(X_0)\cdot(X-X_0)}$$

(skalární součin gradientu $\nabla f(X_0)$ a vektoru $X-X_0$, což připomíná diferenciál funkce jedné proměnné –

$$df(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

místo přírůstku X, $X-X_0$, se často užívá symbol $dX=(dx,dy)$, tedy pak

$$\underline{df(X_0, dX) = \nabla f(X_0)\cdot dX} \quad ,$$

nebo zkráceně jen

$$\underline{df(X_0) = \nabla f(X_0).dX} \quad .$$

A zbývá už jen znát nějaké „nástroje" k tomu, jak poznat, že f je diferencovatelná v bodě, neboli, zda má v bodě totální diferenciál – pomocí limity $\lim\limits_{X\to X_0} \frac{\omega(X-X_0)}{\|X-X_0\|}$ se „to pozná" dost obtížně; platí:

1.) Je-li f diferencovatelná v bodě (x_0, y_0), pak je v bodě (x_0, y_0) spojitá.
Toto je nutná podmínka existence diferenciálu fce, pokud je f nespojitá v bodě (x_0, y_0), nemůže mít zde diferenciál.

2.) Jestliže má funkce f v bodě (x_0, y_0) parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojité v bodě (x_0, y_0), pak je f v bodě (x_0, y_0) diferencovatelná, tj. má v bodě (x_0, y_0) totální diferenciál –
– <u>jednoduchá a užitečná postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu</u> !

A obecně:

Diferencovatelnost a totální diferenciál funkce n-proměnných:

Mějme funkci $f: M \subset R^n \to R$, $n \geq 3$, a
$X_0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0] \in M^0$ (tj. X_0 je vnitřní bod M, a f je tedy definována v okolí bodu X_0)

Dále:

1) existují-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, $i = 1, 2, \dots n$, pak gradientem fce f v bodě X_0 nazýváme vektor

$$\nabla f(X_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right)$$
(= grad $f(X_0)$ – též se značí)

2) Definice – f je diferencovatelná v bodě X_0, když platí:

$$f(X) - f(X_0) = \nabla f(X_0) \circ (X - X_0) + \omega(X - X_0),$$

kde $\lim\limits_{X \to X_0} \frac{\omega(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = 0$ ($\|X - X_0\|$ – norma (velikost) vektoru $X - X_0$)

3) Totálním diferenciálem fce f v bodě X_0 je výraz

$$df(X_0) = \nabla f(X_0) \circ dX,$$

kde $dX = (dx_1, dx_2, \dots dx_n)$ je vektor přírůstků proměnných $(x_1, x_2, \dots x_n)$, tedy, „rozepsáno"

$$df(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)dx_n$$

$$\left(\underset{\text{také}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)dx_i \right)$$

Výrazy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)dx_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ se (často) nazývají diferenciály „parciální".

4) <u>Lineární aproximace funkce f</u> v okolí bodu X_0 :

$$f(X) \cong f(X_0) + \nabla f(X_0) \circ (X - X_0), \quad tj.$$

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) \cong f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_i - x_i^0)$$

5) A nakonec „zobecnění" představy o tečné rovině ke grafu funkce dvou proměnných :

Rovnice $z = f(X_0) + \nabla f(X_0) \circ (X - X_0)$, tj.

$$z = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)(x_n - x_n^0)$$

je rovnice t. zv. tečné nadroviny grafu funkce f v bodě $[X_0, f(X_0)] = [x_1^0, x_2^0, \dots; x_n^0, f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)] \in R^{n+1}$.

<u>ještě označení</u> :

Množinu funkcí $f : G \subset R^n \to R$ (kde G je otevřená množina), které mají v G spojité parciální derivace 1. řádu, budeme značit $C^{(1)}(G)$;

a $C^{(k)}(G)$ bude označení pro množinu funkcí, které mají v G spojité derivace k-tého řádu, $k \in N$.

A nyní už můžeme řešit zadané příklady.

1. Je dána funkce f a bod (x_0, y_0) (a vyberte si aspoň dvě funkce) :

$$f(x,y)=\ln(y-x^2),\ (x_0,y_0)=(1,2);\qquad f(x,y)=\exp(x^2-y),\ (x_0,y_0)=(1,1);$$

$$f(x,y)=x^2+4y^2,\quad (x_0,y_0)=(1,2);\qquad f(x,y)=\frac{x}{y},\ (x_0,y_0)=(-1,3);$$

$$f(x,y)=\ln(xy-1),\quad (x_0,y_0)=(1,2).$$

a) Najděte definiční obor D_f funkce f a načrtněte jej.

b) Vypočítejte $\nabla f(x_0, y_0)$;

c) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě (x_0, y_0) a určete v tomto bodě totální diferenciál funkce f.

d) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

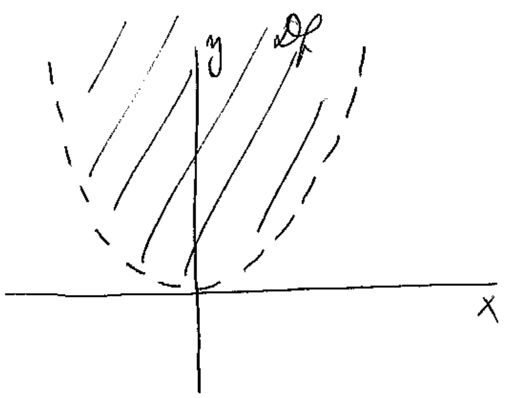
e) Napište lineární aproximaci funkce $f(x,y)$ v okolí bodu (x_0, y_0).

1. $\underline{f(x,y) = \ln(y-x^2)\ ,\ (x_0,y_0) = (1,2):}$

(tuto funkci už jsme „měli" v dú 4)

a) $D_f = \{[x,y]\in R^2;\ y-x^2>0\} = \{[x,y]\in R^2;\ y>x^2\}$;

D_f je otevřená množina (hranice $\partial D_f = \{[x,y];\ y=x^2\}$ není částí D_f);



b) $\nabla f(1,2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2);\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right)$

výpočet parciálních derivací:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y-x^2}\cdot(-2x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y-x^2}\cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1,$$

tedy, $\underline{\nabla f(1,2) = (-2,1)}$

c) parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jsou funkce spojité v bodě $(1,2)$ (dokonce v lib. bodě z D_f) $\Rightarrow$ f je diferencovatelná v bodě $(1,2)$ (v D_f) a

$$df(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)dy,\ \text{tj.}$$

$$\underline{df(1,2) = -2dx + dy}$$

d) rovnice tečné roviny ke grafu f v bodě $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ je

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

tj. v $(x_0,y_0) = (1,2)$: $\quad (f(1,2) = \ln(2-1) = 0)$

$$z = f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-1),$$

a tedy: $\quad z = 0 - 2(x-1) + 1.(y-2)$, tj.

$$\underline{2x - y + z = 0}$$

a normálový vektor ke grafu f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ je (definice) normálový vektor k tečné rovině v tomto bodě grafu – tedy zde $\vec{n}(1,2,0) = (2,-1,1)$ a normálu ke grafu v bodě $(1,2,0)$ můžeme vyjádřit parametricky:

$$\underline{(x,y,z) = (1,2,0) + t(2,-1,1),\ t \in R}$$

e) lineární aproximace funkce f v okolí bodu (x_0,y_0) :

$$f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0),$$

tedy zde pro $(x_0,y_0) = (1,2)$:

$$\ln(y-x^2) \cong -2(x-1) + (y-2) \quad \text{v okolí bodu } (1,2)$$

a třeba pak

$$\ln(1{,}97 - (1{,}01)^2) \cong -2(1{,}01-1) + (1{,}97-2) = -0{,}05$$

$(x,y) = (1{,}01;\ 1{,}97)$ je „blízko" bodu $(x_0,y_0) = (1,2)$

(„kalkulačka" : $\cong -0{,}051398\ldots$)

Snad se řešením předchozího příkladu „vyjasnily" ty důležité (a připomenuté) pojmy – diferencovatelnost, totální diferenciál, rovnice tečné roviny, lineární aproximace funkce – a snad tento příklad je dostatečným návodem i pro řešení příkladů s dalšími uvedenými funkcemi – zopakujeme si vše zjistíme s funkcí!

2. $f(x,y) = \frac{x}{y}$; $(x_0,y_0) = (3,-1)$

a) $\mathcal{D}f = \{[x,y];\ y \neq 0\}$, $\mathcal{D}f$ je otevřená množina, $(3,-1) \in \mathcal{D}f$;

b) $\nabla f(3,-1) = (-1,-3)$, neboť

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}$, tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(3,-1) = -1$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}$, tedy $\frac{\partial f}{\partial y}(3,-1) = -3$;

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jsou funkce spojité v $\mathcal{D}f$, tedy i v bodě $(x_0,y_0) = (3,-1)$ $\Rightarrow$ f je diferencovatelná v $\mathcal{D}f$ (a tedy i v $(3,-1)$)

a $df(x_0,y_0) = \frac{1}{y_0}\,dx - \frac{x_0}{y_0^2}\,dy$, tedy

$df(3,-1) = -dx - 3\,dy$

d) rovnice tečné roviny ke grafu f v bodě $(3,-1,-3)$:

$z = -3 - 1.(x-3) - 3(y+1)$, tj. $x + 3y + z + 3 = 0$

a $\vec{n}(3,-1,3) = (1,3,1)$, tedy normála (parametricky):

$(x,y,z) = (3,-1,3) + t(1,3,1)$, $t \in R$

e) lineární aproximace funkce v okolí bodu $(3,-1)$:

$\frac{x}{y} \cong -3 - (x-3) - 3(y+1)$

2. Užitím lineární aproximace spočítejte přibližně

a) $\ln(1{,}99-(1{,}02)^2)$; nebo b) $\sqrt{(1{,}03)^2+(1{,}98)^3}$; nebo c) $\exp((1{,}02)^2-0{,}97)$.

3*. A trošku náročnější příklad (pro zájemce):

Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$, i když je v bodě $(0,0)$ spojitá a má zde obě parciální derivace .

2a) přibližný výpočet hodnoty $\ln(1{,}99-(1{,}02)^2$:

můžeme zde vzít funkci $f(x,y)=\ln(y-x^2)$ (viz příklad 1)

a její aproximaci v okolí bodu $(x_0,y_0)=(1,2)$, neboť

bod $(x,y)=(1{,}02;1{,}99)$ je „blízko" bodu $(x_0,y_0)=(1,2)$:

V příkladu 1) jsme už vyřešili, že

$$\ln(y-x^2)\cong-2(x-1)+(y-2) \text{ v okolí bodu } (1,2),$$

a tedy $\ln(1{,}99-(1{,}02)^2)\cong-2(1{,}02-1)+(1{,}99-2)$, tj.

$$\ln(1{,}99-(1{,}02)^2)\cong-2\cdot0{,}02-0{,}01=-0{,}05$$

(kalkulačka : $\cong-0{,}05171\ldots$)

2b) výpočet (pomocí lineární aproximace) hodnoty $\sqrt{(1{,}03)^2+(1{,}98)^3}$:

„pro linearizaci" budeme uvažovat funkci

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^3}$, a bod $(x_0,y_0)=(1,2)$,

(bod $(x,y)=(1{,}03;1{,}98)$ je „blízko" $(1,2)$)

Linearizace funkce f v okolí bodu $(1,2)$: $f(1,2)=3$;

$$\nabla f(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^3}}(2x,3y^2),\text{ a tedy } \nabla f(1,2)=\left(\frac{1}{3},2\right)$$

a tedy

$$\sqrt{x^2+y^3}\cong3+\frac{1}{3}(x-1)+2(y-2) \text{ v okolí bodu } (1,2)$$

a tedy $\sqrt{(1{,}03)^2+(1{,}98)^3} \cong 3 + \frac{1}{3}(1{,}03-1) + 2(1{,}98-2)$,

tj. $\underline{\sqrt{(1{,}03)^2+(1{,}98)^3}} \cong 3 + 0{,}01 - 0{,}04 = \underline{2{,}97}$

(a kalkulačka $\cong 2{,}97040\ldots$)

c) <u>vypočít hodnoty $e^{(1{,}02)^2-0{,}97)}$</u> (pomocí lineární aproximace) :

budeme lineárně aproximovat funkci

$\underline{f(x,y) = e^{x^2-y} \text{ v okolí bodu } (x_0,y_0) = (1,1)}$

<u>a linearizace funkce f v okolí bodu $(1,1)$:</u>

$f(1,1) = e^0 = 1$, $\nabla f(1,1) = (2,-1)$ (neboť $\nabla f(x,y) = e^{x^2-y}(2x,-1)$),

a tedy v okolí bodu $(x_0,y_0) = (1,1)$ je

$$e^{x^2-y} \cong 1 + 2(x-1) - (y-1) \; ,$$

tedy $e^{((1{,}02)^2-0{,}97)} \cong 1 + 2(1{,}02-1) - (0{,}97-1)$, tj.

$$\underline{e^{(1{,}02)^2-0{,}97}} \cong 1 + 0{,}04 + 0{,}03 = \underline{1{,}07}$$

(kalkulačka : $\cong 1{,}07293\ldots$)

<u>a příklad 3*</u> – je trošku „obtížnější", ale i „poučný", a pokud chcete, tak jeho řešení najdete v přednášce pro MA2 z 25. 3. 2020, na stránkách 4,5.